Quantum Mechanica 2

Tentamen 4 Juli 2008

◇ *Schrijf je naam en studentennummer op <u>elk</u> tentamenblad.* ◇ *Het tentamen heeft 5 opdrachten.* ◇ *Lees de opdrachten nauwkeurig en geef volledige antwoorden.*

Opdracht 1

a) Geef de Pauli spin-matrices. Hoe zijn deze gerelateerd aan de spin operatoren S_x, S_y, en S_z?

b) Wat zijn de eigenwaardes van de impulsmoment operatoren J_z en J^2?

c) De toestanden van een waterstof atoom behorend bij quantumgetal n zijn gedegenereerd. Wat is de degeneratie van deze toestanden?

d) Druk de ladder operatoren L_- en L_+ uit in termen van L_x en L_y

e) Bereken de commutator $[[L_+, L_z], L_-]$

f) Bereken de commutator $[[L_+, L_-], L_z]$

Opdracht 2: Pariteit

De pariteitsoperator Π is een operator die werkend op een toestandsvector $|\Psi(\vec{r}) >$ of een functie $f(\vec{r})$ de vector $\vec{r}$ transformeert in $-\vec{r}$. De pariteitsoperator heeft eigenwaardes ± 1.

a) Laat expliciet zien dat een vlakke golf geen eigenfuncie van de pariteitsoperator is.

b) Welke superposities van vlakke golven zijn wel eigenfuncties van de pariteitsoperator?

c) Laat zien dat de eigenfuncties van de impulsmomentoperator $\hat{L}^2$ ook eigenfuncties van de pariteitsoperator zijn, waarbij de eigenwaarde enkel afhangt van de eigenwaarde l van $\hat{L}^2$, en niet van de eigenwaarden m van $\hat{L}_z$.
Opmerking: Het is handig te starten met de toestand

$$\left(\hat{L}_\pm\right)^r |l, m = 0\rangle \qquad r = 0, 1 \ldots l$$

en te laten zien dat dit een eigentoestand van de pariteitsoperator is, met een eigenwaarde die onafhankelijk is van r.

Opdracht 3: Tijdsonafhankelijke storingsrekening

Een deeltje met massa m zit in een 1 dimensionale potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{voor } x < 0 \text{ en } x > a \\ \beta \sin(\pi x/a) & \text{voor } 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

a) Dit probleem is op te vatten als een 'standaard' probleem met een storing. Geef de Hamilton operator voor het 'standaard' probleem en voor de storing.

b) Geef de golffuncties en eigenwaardes voor de schrödinger vergelijking van het ongestoorde probleem.

c) Bereken de 1^e orde correctie voor de energie van de eigentoestanden ten gevolge van de storing.

d) Onder welke twee voorwaarden is het voorgaande antwoord een goede benadering van de echte energie eigenwaarden van het probleem?

e) Vind de niet nul matrix-elementen van H'. Je kunt het 'hard' uitrekenen, maar het antwoord ook beredeneren zonder de integraal expliciet uit te rekenen.

Opmerking:

$$\int_0^a \sin(\pi x/a)\sin^2(n\pi x/a) = \frac{4n^2 a}{(4n^2-1)\pi}$$

$$\int_0^a \sin^2(\pi x/a)\sin^2(n\pi x/a) = \frac{a}{4}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

Opdracht 4: Heisenberg representatie

Een systeem wordt beschreven door de volgende Hamilton operator:

$$\hat{H}_0 = \epsilon\left(\hat{r}_{1,+}\hat{r}_{1,-} + \hat{r}_{2,+}\hat{r}_{2,-}\right).$$

De grondtoestand van het systeem is $|0>$, en het systeem heeft twee aangeslagen toestanden $|1>$ en $|2>$ die een energie ϵ hebben. Deze toestanden zijn orthonormaal.
$\hat{r}_{i,\pm}$ zijn ladderoperatoren waarvoor geldt: $\hat{r}_{1,-}|1>=|0>$; $\hat{r}_{1,-}|2>=0$; $\hat{r}_{1,-}|0>=0$; $\hat{r}_{1,+}|1>=\hat{r}_{1,+}|2>=0$; $\hat{r}_{1,+}|0>=|1>$ (en analoog voor $\hat{r}_{2,\pm}$).

a) Geef de Hamiltonoperator voor $\hat{H}_0$ in de Heisenberg (matrix) notatie.

De interactie tussen de aangeslagen toestanden wordt gegeven door

$$\hat{H}' = \alpha\left(\hat{r}_{1,+}\hat{r}_{2,-} + \hat{r}_{2,+}\hat{r}_{1,-}\right).$$

b) Wat doet deze interactie?

c) Geef de Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$ in de Heisenberg representatie.

d) Bereken de energie eigenwaarden van $\hat{H}$

e) Geef de orthonormale eigentoestanden van $\hat{H}$ in termen van $|0>$, $|1>$, en $|2>$

Opdracht 5: Spin in een magnetisch veld

Een electron met spin 1/2 interageert met een magnetisch veld met Hamilton operator $H = -\gamma \vec{S} \cdot \vec{B}$, waarin $\gamma = -e/mc$ en het magnetisch veld $\vec{B} = B\hat{z}$ is. Op tijd $t = 0$ bevindt het electron zich in de toestand

$$|\psi(0)\rangle = |\hat{n}, +\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

a) Bewijs dat $|\psi(0)\rangle$ een eigentoestand van de operator $\hat{S} \cdot \hat{n}$ is met eigenwaarde $+\hbar/2$, *i.e.* de toestand $|\psi(0)\rangle$ representeert een spin met projectie $+1/2$ op de richting $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. N.B., $\hat{S} = (S_x, S_y, S_z)$.

b) Wat is de toestand na een tijd t? Gebruik de relatie

$$e^{i\hat{\sigma}\cdot\hat{n}\theta} = \cos\theta \mathbf{1} + i\hat{\sigma}\cdot\hat{n}\sin\theta$$

c) Met $\theta = \pi/2$, op welke tijd T wordt de toestand $|\psi(t)\rangle$ de eigentoestand van $\hat{S}_x$ met eigenwaarde $+\hbar/2$?

Gebruik dat de eigentoestand van $\hat{S}_x$ met eigenwaarde $+\hbar/2$ wordt gerepresenteerd door de vector $|\alpha_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$